TD électrostatique : Champ et potentiel électrostatique

Exercice 1 : Champ de deux demi-droites uniformément chargées

1. Une demi-ligne infinie Ax porte une densité linéaire de charge $\lambda > 0$ uniforme. Déterminer en fonction de a, y et λ, les composantes E_x et E_y du champ électrique suivant les axes Ox et Oy en un point M (OM = y) situé sur la perpendiculaire Oy à Ox, où O est sur le prolongement de Ax, à une distance OA = a de A.
2. On considère maintenant deux demi-droites électrisées Ax et A'x' symétriques par rapport à O, et portant la même densité linéique de charge λ.

2.a. Déterminer la direction et le module du champ électrique $\vec{E}$ en M en fonction de a, λ et y.

2.b. En déduire les expressions du champ électrique en M (OM = y)

- crée par une ligne rectiligne indéfinie électrisée uniformément
- crée par un segment de longueur 2a centré sur O, électrisé uniformément.

Exercice 2 : Champ et potentiel d'un anneau chargé sur l'axe et au voisinage de l'axe

On considère une circonférence de centre O, de rayon R, d'axe Ox, uniformément chargée avec une densité linéaire λ.

1. Déterminer directement, en un point M de l'axe Ox (OM = x) :

1.a. le champ électrique E(x),

1.b. le potentiel électrique V(x).

2. Vérifier la relation entre le champ et le potentiel électrique.

3. Exprimer le champ électrique maximum sur l'axe de la circonférence chargée en fonction de λ et R. Tracer les graphes E(x) et V(x) pour x>0.

4. Exprimer la composante radiale E_r du champ électrique en un point A, voisin de l'axe, à la distance r de l'axe, et d'abscisse x.

Exercice 3 : Champ et potentiel de deux disques uniformément chargés

A. Champ et potentiel électrostatique d'un disque chargé

Un disque circulaire de centre O, d'axe Ox et de rayon R, est chargé uniformément avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$.

1. Déterminer en tout point M de l'axe Ox, d'abscisse $x = \overline{OM}$, la direction et l'intensité du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en fonction de σ , R et x.
2. Déterminer le potentiel électrostatique en M, en fonction de σ , R et de x par deux méthodes. Tracer le graphe V(x).
3. Déterminer au point P d'abscisse x et à la distance r de l'axe Ox, voisin de l'axe $(\mathrm{r} \ll \mathrm{x})$, le champ électrique $\vec{E}(P)$ par ses composantes radiale et axiale.

B. Champ et potentiel électrostatique sur l'axe de deux disques chargés coaxiaux

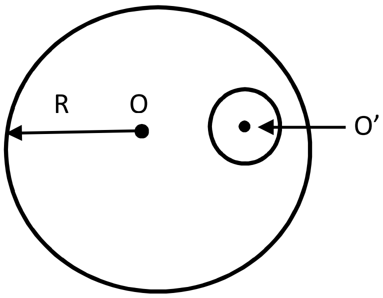
On considère deux disques D_1 et D_2 de même rayon R, de centres O_1 et O_2, de même axe Ox (O milieu de O_1O_2). L'écartement des disques est O_1O_2 = 2D. Ces disques D_1 et D_2 sont uniformément chargés avec les densités surfaciques respectives $+\sigma$ et $-\sigma$ (avec $\sigma > 0$).

4. Exprimer en fonction de σ, D et R :

4.a. l'intensité du champ électrostatique au centre O de la distribution ;
4.b. la différence de potentiel V_1-V_2 entre les centres D_1 et D_2 des disques chargés.
5.. Exprimer au point M de l'axe commun d'abscisse $x = \overline{OM}$, entre les deux disques, l'intensité du champ électrostatique E(x).

Exercice 4 : champ dans une cavité

1. Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en un point M d'une cavité sphérique de centre O', de rayon R', située à l'intérieur d'une boule de centre O et de rayon R chargée avec la densité volumique uniforme ρ.



Cavité sphérique creusée dans une boule

2.a. En déduire le champ électrostatique en un point M situé à l'intérieur d'une sphère creuse de rayon R et uniformément chargée en surface avec la densité σ.
2.b. Vérifier le résultat de la question **2.a** à l'aide d'une application directe du théorème de Gauss.
3.a. Utiliser les résultats de la question 1. pour déterminer le champ gravitationnel créé à l'intérieur d'une grotte sphérique de centre K creusée à l'intérieur de la terre. On supposera que la terre est une sphère de centre T est de masse volumique uniforme μ.
3.b. Déterminer l'orientation de la surface libre d'un lac au repos situé à l'intérieur de la grotte.

Exercice 5 : Potentiel de Yukawa
Le physicien Japonais Hideki Yukawa (Prix Nobel 1949) a postulé une forme de potentiel pour traduire les interactions entre particules dans le noyau atomique. On étudie ici ce potentiel comme s'il s'agissait d'un potentiel électrostatique.
Une distribution de charge à symétrie sphérique crée, à une distance r, un potentiel électrostatique de la forme :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Q et a étant des constantes positives.
1. Déterminer les unités de Q et a.
2. Déterminer le champ électrique correspondant.
3. En déduire la charge q(r) contenue dans une sphère de centre O et de rayon r.
Déterminer q(r) dans les deux cas extrêmes : r tend vers zéro et r tend vers l'infini. En déduire qualitativement la nature de la distribution de charge et donner une interprétation de a.

4. Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$.

Exercice 6 : Etude d'une couronne sphérique

Une sphère creuse S, de centre O, de rayon extérieur R et de rayon intérieur αR (α<1) est électriquement chargée en volume avec une charge volumique uniforme ρ.

1. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en un point M extérieur à la sphère.
2. Calculer $\vec{E}(M)$ pour $r \in [\alpha R ; R]$.
3. Déduire le potentiel électrostatique V(r) pour r > R en choisissant l'origine de potentiel à l'infini.
4. Déterminer V(r) pour r < αR.
5. Lorsque $1 - \alpha \ll 1$, S devient une coquille sphérique de faible épaisseur, que l'on assimile à une sphère de rayon R, uniformément chargée en surface avec la densité surfacique σ. Déterminer σ en fonction de α, ρ et R.
6. Dans l'hypothèse de la question précédente, déterminer la différence de potentiel U = V(R) – V(O).

Exercice 7 : Électromètre

Un électromètre est constitué de deux boules métalliques identiques de masse m et de rayon r suffisamment petit pour qu'elles puissent être considérées comme ponctuelles. Elles sont suspendues à un même point O par deux fils isolants de même longueur b. Une boule notée A est fixe, le point A est sur la verticale passant par O. L'autre notée P est mobile. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé uniforme.

On donne : b = 12,0 cm, m = 2,55 g, g = 9,81 m.s^{-2} et $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}$ F.m^{-1}.

Dans un premier temps, la boule P n'est pas chargée et la boule A porte la charge électrique Q. On met les deux boules en contact. La charge Q se répartit de manière égale entre les deux boules. Il en résulte une déviation du fil OP d'un angle ϕ par rapport à la verticale.

1. Donner l'expression de l'intensité F de la force électrostatique qui s'exerce sur P. Quelle est sa direction ?

2. Déterminer l'expression de l'angle ϕ_e à l'équilibre.

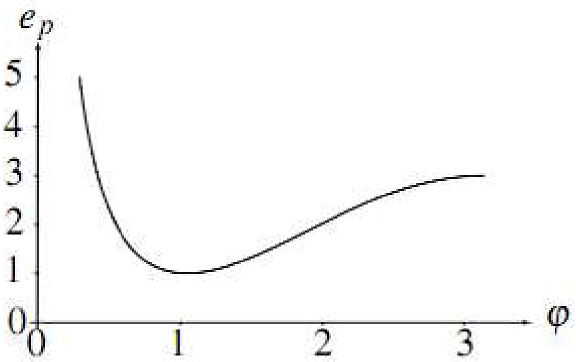
3. Montrer que la mesure de l'angle ϕ_e à l'équilibre permet de mesurer la valeur de la charge Q.

4. On mesure ϕ = 60,0°. En déduire la valeur numérique de la charge Q.

5. Exprimer l'énergie potentielle E_p de P.

6. Retrouver l'expression de ϕ_e et étudier la stabilité de l'équilibre.

On s'aidera de la courbe suivante, où on a tracé la fonction $e_p = \frac{E_p}{E_{p,ref}}$ en fonction de ϕ, avec $E_{p,ref} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 b}$.



Exercice 8 : Dipôle électrostatique

Le chlore est plus électronégatif que l'hydrogène. Par conséquent, dans une molécule de chlorure d'hydrogène H-Cl, l'atome de chlore porte une charge –q et l'atome d'hydrogène une charge opposée +q. Cette distribution de charge, globalement neutre, porte le nom de dipôle électrostatique. On note **a** la distance entre les deux atomes.

1. La carte du champ électrostatique crée par un dipôle est représentée sur la figure ci-dessous.

1.a. A l'aide d'une analyse des symétries, justifier la direction du champ électrostatique $\vec{E}$ aux points A et B.

1.b. Comment doit être situé le réseau d'équipotentielles par rapport aux lignes de champ électrostatique ?

2.a. Rappeler en quoi consiste l'approximation dipolaire électrostatique. Donner l'ordre de grandeur de l'amplitude du moment dipolaire $\vec{p}$ de la molécule de chlorure d'hydrogène. Quelle est l'unité adaptée à la description des moments dipolaires à l'échelle moléculaire.

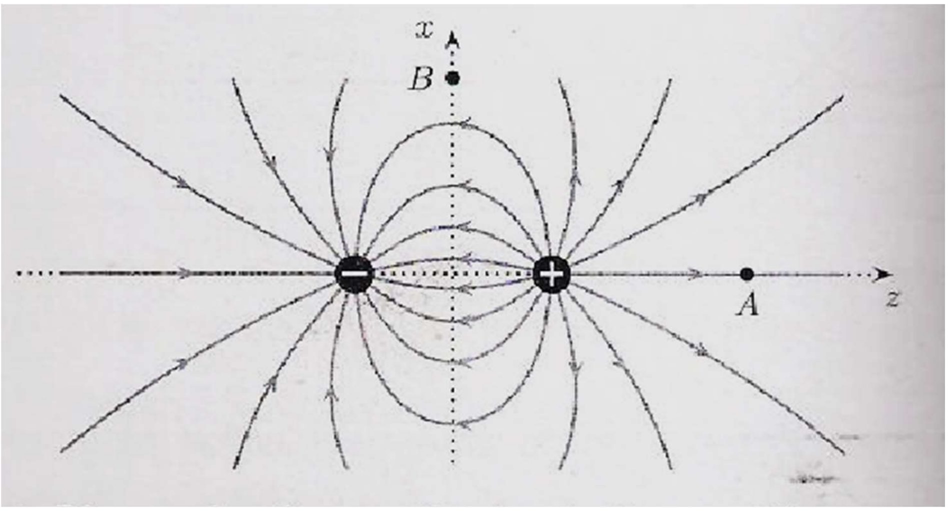
2.b. L'origine des potentiels est prise à l'infini. En se plaçant dans le cadre de l'approximation dipolaire, montrer que le potentiel électrostatique V(M) en un point M repéré par les coordonnées sphériques r, θ *et* φ s'écrit :

$$V(r, \theta) \approx \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

3. En restant dans l'approximation dipolaire, en déduire l'expression du champ $\vec{E}(M)$.

4. Déterminer l'équation des surfaces équipotentielles.

5. Pour déterminer l'équation des lignes de champ électrostatique, on traduit mathématiquement la définition des lignes. En tout point M d'une ligne, l'élément $\overrightarrow{dl}_M$ de ligne est localement parallèle à $\vec{E}(M)$. En exprimant cette condition, construire des relations différentielles et en déduire l'équation de la ligne de champ électrostatique.



Ligne du champ électrostatique crée par un dipôle.